

La representación de expresiones decimales en la recta: concepciones de estudiantes

María Carolina Benito^(1,2), Mara Cedrón^(1,3), Betina Duarte^(1,4), Uriel Kasman^(1,5),
Cecilia Lamela^(1,6), María Cecilia Montes de Oca^(1,7)

¹ Universidad Pedagógica Nacional - UNIPE

² maria.benito@unipe.edu.ar

³ mara.cedron@unipe.edu.ar

⁴ betina.duarte@unipe.edu.ar

⁵ uriel.kasman@unipe.edu.ar

⁶ cecilia.lamela@unipe.edu.ar

⁷ maria.montes@unipe.edu.ar

Resumen

En esta ponencia presentamos el análisis de concepciones de estudiantes universitarios sobre un aspecto de la relación entre la recta numérica y los números reales: la ubicación en la recta de expresiones decimales infinitas. Esta indagación forma parte de un proyecto de investigación cuyo objetivo es estudiar un proceso de conceptualización del objeto recta real accesible y al mismo tiempo potente para futuros profesores de matemática, a través del diseño, implementación y análisis de una secuencia de enseñanza. Con este interés hemos desarrollado un cuestionario y un conjunto de entrevistas a estudiantes que finalizan el primer año de formación para comprender, en una etapa previa a la secuencia de aprendizaje, cuáles son sus concepciones sobre la ubicación exacta de expresiones decimales en la recta y a través de ello cuáles son sus concepciones sobre la recta numérica en tanto objeto matemático. Hemos desarrollado un cuestionario a 18 estudiantes y entrevistas de profundización. Concluimos que aceptar una ubicación exacta en ausencia de un método para ello supone un cierto posicionamiento teórico con concepciones de los números, los puntos y la recta en calidad de objetos ideales. Las distintas representaciones de los números afectan el alcance de este posicionamiento.

Palabras clave: recta numérica; expresiones decimales; infinito potencial.

Introducción y antecedentes

La representación de los reales en la recta supone una identificación entre dos conceptos: recta geométrica y números reales (Scaglia (2000), Bergé (2004)). Esta identificación va más allá de una simple correspondencia número-punto ya que se trata de asignar a un concepto matemático la estructura de otro concepto, lo que distingue en consecuencia a la recta geométrica de la recta numérica. Postulamos así que la recta numérica, en tanto objeto matemático, adquiere a través de esta relación “número - punto” propiedades matemáticas cuya comprensión comporta un proceso de abstracción del que tiene que hacerse cargo la enseñanza. Mientras la recta sea visualizada como un objeto material que se dibuja - en una hoja, pizarrón o computadora - sus propiedades matemáticas resultan opacas (Zazkis y Sirotic, 2004) para el estudiante.

Desde una construcción intuitiva y geométrica es posible considerar lo continuo en la recta como lo que no tiene agujeros ni saltos (Vergnac, 2013). Esta caracterización permite distinguir lo continuo de lo discreto, pero no necesariamente de lo denso no continuo. En efecto, visualmente no es posible diferenciar la recta racional, densa pero no continua, de la recta real y continua. De este modo, los y las estudiantes conciben sólo dos alternativas: lo discreto y lo continuo, una concepción que Durand-Guerrier (2018) y Vergnac (Op. cit.) denominan “la díada continuo/discreto”. Sostienen las autoras que un estudio de la densidad en \mathbb{Q} permitiría considerar la tríada discreto/denso/continuo como punto de apoyo para la conceptualización del conjunto de los números reales. Tomamos esta formulación como hipótesis de trabajo para nuestra investigación sobre concepciones de los estudiantes acerca de la recta numérica.

Algunas investigaciones (Garbin, 2005; Kidron y Tall, 2015 y Sierpinska, 1985) señalan distintas concepciones del infinito en estudiantes de niveles secundario y superior: mientras que unos tienen una percepción del infinito potencial otros aceptan el infinito en tanto un proceso finalizado. En nuestra investigación estas concepciones del infinito se revelan frente a la propuesta de considerar la ubicación exacta de expresiones decimales infinitas. También hemos identificado otras concepciones donde el infinito se asocia a lo “no determinado” o imposible de prever, en sintonía con otras investigaciones (Montoro y Scherer, 2004).

Hemos analizado las concepciones de estudiantes a través de un cuestionario y una entrevista donde indagamos: la capacidad para distinguir entre objetos ideales y materiales para el caso de la recta y sus puntos, la comprensión de la densidad de los racionales y sus consecuencias, la distinción entre continuidad y densidad, la relación

“números-puntos” y la ubicación “exacta” de una variedad de números reales en la recta numérica. En esta ponencia nos abocaremos a esta última cuestión.

La indagación: objetivos y metodología

Nos propusimos indagar las concepciones de estudiantes sobre los números reales, la recta numérica y la recta geométrica, y los vínculos que establecen entre ellos estudiantes que finalizan el primer año¹ del profesorado de matemática en el que se consolidan cuestiones sobre la geometría, los números enteros, racionales e irracionales, y las funciones de variable real que forman parte de la currícula del nivel secundario. En esta ponencia nos centraremos en el análisis de las dificultades que ofrece a los y las estudiantes la ubicación exacta de números en la recta en relación con sus características. En particular queremos estudiar el papel de la representación decimal infinita en tanto una complejidad para alcanzar dicha exactitud. Con este propósito elaboramos un cuestionario que se organiza en dos secciones. En la primera parte, se presentan siete afirmaciones y se solicita elegir entre cuatro opciones: estás totalmente de acuerdo, parcialmente de acuerdo, no estás de acuerdo, no podrías tomar posición al respecto. Para dos de esas afirmaciones se solicitó además una explicación por escrito de la opción seleccionada. La segunda parte consiste en preguntas abiertas en las que se pide: explicar qué características distinguen a los números reales de otros conjuntos numéricos; identificar entre distintas escrituras cuáles representan números reales; a partir de considerar dos construcciones diferentes para representar números en la recta indicar qué otros números podrían ubicarse con adaptaciones de esas construcciones.

El cuestionario fue suministrado a 18 estudiantes. El análisis de las respuestas obtenidas nos brindó un primer acercamiento a sus concepciones y nos permitió identificar diferentes posturas a partir de las cuales seleccionamos dos grupos de 4 estudiantes para realizar entrevistas individuales. Un grupo se caracteriza por emplear propiedades en sus explicaciones escritas, aunque no siempre de manera completa o abarcando la generalidad involucrada, pero se evidencia una coherencia con las respuestas dadas en estas preguntas abiertas y las que dieron a las preguntas cerradas. En el otro grupo, ubicamos a estudiantes cuyas respuestas presentaron algunas contradicciones. Los conceptos teóricos que mencionaron y los ejemplos utilizados nos resultaron menos accesibles para entender su posición.

¹ La Universidad Pedagógica Nacional tiene ingreso directo.

Para las entrevistas elaboramos preguntas que nos permitieran avanzar sobre las respuestas brindadas en el cuestionario y también algunos ejemplos a proponer para tensar sus argumentos en caso de ser necesario. Durante las entrevistas, que se realizaron a tres semanas del cuestionario, cada estudiante tuvo disponible sus respuestas las cuales se fueron leyendo como parte de la conversación. En caso de registrar un cambio de posición, se dejó por escrito.

Los números con expresión decimal infinita y su ubicación en la recta numérica

Cuestionario

A continuación, presentaremos una de las afirmaciones del cuestionario. Compartimos el análisis de las posiciones tomadas por los y las estudiantes y sus argumentaciones interpretando posibles concepciones que podrían comandar sus respuestas. La afirmación en cuestión es la siguiente:

Los números con expresión decimal infinita no tienen una ubicación exacta en la recta numérica.

Pedimos una explicación de sus posiciones para acceder a los distintos ejemplos de números con expresión decimal infinita a los que apelaron, a las conceptualizaciones que tienen sobre ellos y al papel que juega el hecho de disponer o no de un protocolo de construcción para aceptar la posibilidad de una ubicación exacta en la recta.

En un análisis a priori hemos considerado que quienes estén en desacuerdo podrían apoyarse en uno o más ejemplos de números con expresión decimal infinita a los que le asignan una ubicación exacta en la recta. Podrían recurrir a expresiones decimales periódicas representándolas de modo exacto con apoyo en el Teorema de Tales, o bien a números irracionales particulares, como las raíces cuadradas no enteras utilizando el Teorema de Pitágoras. En estos casos los y las estudiantes apelan al conocimiento de un método para argumentar sobre su ubicación en la recta.

Quienes estén de acuerdo podrían considerar que toda ubicación es imprecisa recurriendo a una concepción material de la recta y, por esto, sostener que toda expresión decimal, finita o infinita tiene una ubicación aproximada. Asimismo, podrían estar de acuerdo quienes consideren que frente a una expresión decimal infinita todo procedimiento de ubicación no se puede concluir. En el primer caso estarían considerando un proceso concreto que solo les permite ubicar el número de manera aproximada y no un procedimiento ideal de ubicación de los números. En el segundo caso, conjeturamos que es la conceptualización del infinito como infinito potencial la

que comanda la relación de los números con expresión decimal infinita y su representación en la recta.

Sobre los resultados obtenidos, el 44,4% estuvo de acuerdo con la afirmación, el 44,4 % estuvo en desacuerdo y 11,2 % estuvo parcialmente de acuerdo.

Quienes estuvieron de acuerdo mencionaron la infinitud de la expresión decimal como impedimento para encontrar la posición exacta. En algunos casos argumentaron su posición apoyándose en ciertas concepciones que tienen sobre estos números: “el número es infinito”, “no sabemos con exactitud el número”, “el número no es exacto”. En otros casos, solamente mencionaron que su ubicación sería aproximada.

Quienes estuvieron en desacuerdo exhibieron ejemplos de números con expresión decimal infinita que tienen una ubicación exacta en la recta como los que habíamos anticipado. En algunas explicaciones se sumaron ejemplos de números que consideraron que no pueden ubicarse de manera exacta, tal como los irracionales dados por leyes de formación². Es decir, propusieron ejemplos para los que no conocen un método de construcción. En otros casos explicitaron que, a pesar de no conocer un método de ubicación para algunos números, todos tienen un lugar exacto en la recta.

Además, entre quienes estuvieron en desacuerdo, hubo estudiantes que consideraron que los números de expresión decimal infinita son racionales sin tener en cuenta la posibilidad de que estos sean irracionales. Estas explicaciones nos ayudaron a visualizar argumentos y concepciones que no habíamos anticipado.

Entrevistas

A propósito de la afirmación, durante las entrevistas se analizó la ubicación de otros números. Esto nos permitió indagar sobre las ideas que tienen los y las estudiantes de la recta en tanto objeto ideal y material. Nos parece importante destacar que cuando mencionamos una ubicación exacta y precisa en la recta hacemos referencia a la recta ideal, ya que en la recta material todo es aproximado.

Andrea (que estuvo parcialmente de acuerdo) explicó que puede ubicar exactamente a números con expresión decimal infinita y periódica, así como también a los que son de

² Nos referimos a números irracionales dados por sus expresiones decimales infinitas que están determinadas a partir alguna ley que caracteriza la formación de las cifras de esa expresión.

la forma “raíz cuadrada de un número primo”. No obstante, los que son “al azar”³ o con una ley de formación, a su entender, no pueden ubicarse exactamente en la recta porque: “son números infinitos y no sabés cómo siguen”. Aun así, dio una explicación sobre cómo aproximarse a la ubicación del número que ella llama “ubicación por posición”. Es un proceso que consiste en ir ubicando en la recta cada expresión decimal finita que se obtiene al truncar la expresión del irracional, incorporando en cada paso una cifra decimal más. Sin embargo, al ser un proceso infinito, Andrea no tiene certeza sobre la ubicación exacta de estos números por no poder finalizar el método. Entendemos que para Andrea está fuera de su alcance aceptar que la infinitud de pasos no obtura la posibilidad de encontrar una posición exacta. Interpretamos que esto muestra una concepción del infinito potencial en relación con la representación de los números en la recta.

En el caso de Isabel (que estuvo totalmente de acuerdo) los números con expresión decimal finita son “números que terminan” —a los que refiere como definidos— y tienen una ubicación exacta en la recta. Los números que tienen una expresión decimal infinita son “números que no terminan” —a los que llama indefinidos— y no tienen una ubicación exacta en la recta. Conoce los métodos de construcción de Tales y de Pitágoras para ubicar números, aunque duda que den la ubicación exacta en el caso de expresiones decimales infinitas. Cuando se le preguntó si para ella el número periódico $0,323232\dots$ admite una ubicación exacta, Isabel respondió que no puede ubicarlo exactamente. En sus palabras: “ $0,323232\dots$ infinitamente no sé dónde lo voy a encontrar. Sé que en algún momento se va a chocar con $0,333333\dots$ o $0,323232$ hasta que pueda cambiar a $0,33$ el último, pero ya va a ser otro número. Tampoco podría encontrarlo”.

A partir del diálogo con Isabel, interpretamos que los números con expresiones decimales infinitas están —en su concepción— en movimiento en la recta y por eso no tendrían un lugar exacto. Consideramos que este movimiento representa una posición diferente de la que tienen quienes afirman: “tengo un proceso infinito para ir generando la ubicación de las cifras entonces no sé dónde queda la ubicación exacta”, como podría decir Andrea. Volviendo al pedido de ubicar el número periódico $0,323232\dots$, la entrevistadora le consultó por $32/99$ aclarando que es la expresión fraccionaria del

³ Para esta estudiante “al azar” significa que las cifras decimales se definen de manera aleatoria, sin un patrón, lo que podría generar una expresión decimal infinita no periódica.

número; Isabel manifestó que esta fracción sí puede tener una ubicación exacta. Consideramos entonces que, para esta estudiante, la representación del número influye en la posibilidad de encontrar su ubicación exacta en la recta.

En un primer momento de la entrevista Luciana (que no estuvo de acuerdo) manifestó tener en claro que puede ubicar de forma exacta a los números racionales y que conoce un método para ubicar las raíces cuadradas de números primos. Sin embargo, disponer o no de una técnica no es el verdadero conflicto de ella para pensar que cada número tiene una ubicación precisa en la recta. El problema, en la visión de Luciana, está en el hecho de que la recta tiene infinitos racionales que son densos, al respecto se pregunta “¿en qué lugar entran los irracionales en la recta (si ya hay infinitos racionales)?”. Le parece que hay una contradicción entre ambos hechos: si bien concibe la existencia de infinitos irracionales a partir de sus escrituras decimales, no ve la manera de que “entren” en la recta ya que, para ella, no hay más espacio después de ubicar a infinitos racionales.

Poniendo en vínculo lo desplegado por Luciana e Isabel, nos interesa resaltar diferencias en sus planteos. Mientras Luciana "entiende" que con un método $\sqrt{2}$ se puede ubicar en la recta, le parece imposible ubicar irracionales cuando la recta está "llena" de racionales. En cambio, la duda de Isabel es diferente. Para ella, la infinitud de la expresión decimal (tanto para periódicos como no periódicos) es la razón para dudar de la efectividad del método para dar la ubicación exacta.

Cristina (que no estuvo de acuerdo) manifiesta conocer el Teorema de Pitágoras para ubicar algunos irracionales de forma exacta en la recta numérica y agrega que hay infinitos irracionales que “aun sin tener una forma de ubicarlos están en la recta también”. Cristina parece estar en una posición más teórica que sus compañeras: no necesita conocer un método para tener certeza de que ocupan un lugar exacto.

Para estas estudiantes, la ubicación exacta de algunos números reales —enteros, expresiones decimales finitas— en la recta numérica no pareciera generar dudas. Con respecto a los números con expresión decimal infinita reconocemos diferentes posturas: la creencia de que hay una posición exacta para todos los números aun cuando no se disponga de (o no se conozca) un método para ubicarlos; suponer que los números con expresión decimal infinita no tienen un lugar exacto pues al intentar encontrarlo se genera un proceso infinito o bien un proceso que se mueve (y ese movimiento no se detiene); no ver posible que algunos números como los irracionales puedan ubicarse en la recta (aun cuando conocen métodos que les permitirían hacerlo de manera exacta para

algunos irracionales) pues consideran que la recta está “llena” de racionales y, en consecuencia, no hay lugar para otros números.

Conclusiones

Tanto las respuestas del cuestionario como la profundización lograda a través de las entrevistas nos permiten afirmar que las expresiones decimales infinitas generan un conflicto en la relación números-puntos que estas estudiantes tienen en proceso.

En algunos casos, las técnicas (apoyadas en los teoremas de Tales y Pitágoras) son suficientes para dar confianza acerca de la ubicación exacta de algunas familias de números. Sin una técnica que implique una cantidad finita de pasos, no hay certeza. Consideramos que admitir la ubicación exacta de cualquier número, se conozca o no un método, remite a una concepción ideal de la recta. La duda acerca de poder ubicar o no a expresiones decimales infinitas nos hace pensar en la transición entre una mirada material y una ideal de la recta en estas estudiantes finalizando el primer año.

A su vez, la conceptualización del infinito juega un rol central en el posicionamiento de cada estudiante. Advertimos diversas concepciones del infinito, algunas en proceso y próximas a la de infinito actual, otras funcionando como obstáculo para pensar algunas características de los números reales; en particular la recta en tanto representación de todos los números. El concepto de número real se construye en la matemática a través de procesos que necesariamente hacen uso de la idea de infinito actual.

Referencias bibliográficas

- Bergé, A. (2004). Un estudio de la evolución del pensamiento matemático: el ejemplo de la conceptualización del conjunto de los números reales y de la noción de completitud en la enseñanza universitaria [Tesis Doctoral, UBA]. Biblioteca digital FCEN UBA.
- Durand-Guerrier, V. (2018). La triade discret, dense, continu dans la construction des nombres. *Actes de la CORFEM*, Nîmes 13-14 juin 2016.
- Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 8, (2), 169-193.
- Kidron, I.; Tall, D. (2015). The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics* 88, 183-199.

- Montoro, V. y Scheuer, N. (2004). ¿Cómo piensan el infinito matemático los estudiantes universitarios de distintas carreras? *Revista Epsilon*, 60, 20 (3), 435-447.
- Scaglia, S. (2000). Dos conflictos al representar números reales en la recta numérica [Tesis doctoral]. Universidad de Granada.
- Sierpiska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 6 (1) 5-67.
- Vergnac, M. (2013). *Les nombres réels au lycée et à l'entrée à l'université. Premier état des lieux et perspectives*. Tesis Master 2 recherche, Université Montpellier II Mention "Histoire, Philosophie et Didactique des Sciences". Université Montpellier II.
- Zazkis, R. y Sirotic, N. (2004). Making Sense of irrational numbers: focusing on representation. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 4, 497–504.